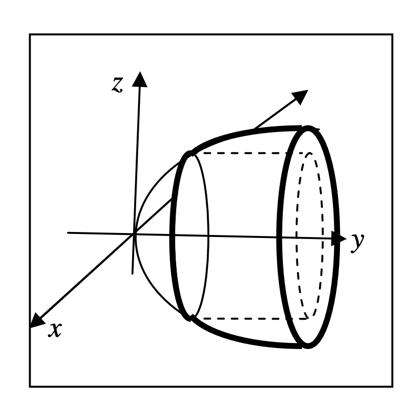
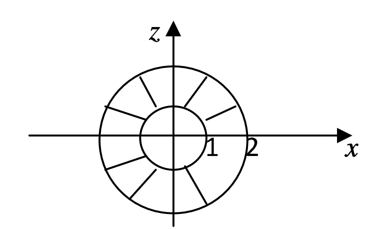
Coloquio resuelto de 13/12/12

1a) Sea $\overline{F}(x,y,z)=\left(-\frac{x}{b},\frac{b^3}{3}(x^2+z^2),(a-3)^2 z\right)$ **un campo escalar sobre R^3 con** $a,b\in R\ ;\ b\neq 0$**. Sea la superficie** $\Sigma=\{(x,y,z)\in R^3 : y=x^2+z^2\ ;\ 1\leq y\leq 4\}$ **orientada con la normal alejándose del eje *y*.**

Se denomina $h(a,b)$ **al flujo del campo** $\overline{F}$ **a través de la superficie** Σ**. Hallar los puntos estacionarios de *h* y clasificarlos**.

Solución:





Esta es la proyección de la superficie sobre *xz*
El vector normal a la superficie Σ es
$y=x^2+z^2 \ \rightarrow x^2+z^2-y=0 \ \rightarrow \breve{n}=(2x\ ,-1\ ,2z)$
Determinamos el flujo <u>por definición</u>, para ello pasamos la Integral de Superficie en cartesianas a Coord. Cilíndricas.

$$h(a,b)=\iint_{\Sigma}\overline{F}\cdot\breve{n}\ ds=\int_{\Sigma}\int\left(-\frac{x}{b}\ ,\ \frac{b^3}{3}(x^2+z^2),(a-3)^2 z\right)\cdot(2x,-1,2z)\,dx\ \ dz$$

$$\int_0^{2\pi}\int_1^2\left(-\frac{2r^2\cos^2(\varphi)}{b}-\frac{b^3}{3}(r^2)+2(a-3)^2 r^2 sen^2(\varphi)\right) r\ \ dr\ \ d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi}\left(-\frac{r^4}{2b}\cos^2(\varphi)-\frac{b^3r^4}{12}+\frac{r^4(a-3)^2 sen^2(\varphi)}{2}\right)\Big|_1^2\ d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{15}{2b}\underbrace{\cos^2(\varphi)}_{\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}}-\frac{15b^3}{12}+\frac{15}{2}(a-3)^2\underbrace{sen^2(\varphi)}_{\frac{1-\cos(2\varphi)}{2}}\right)d\varphi=-\frac{15}{2b}\pi-\frac{15b^3\pi}{6}+15\ (a-3)^2\pi$$

$$\Rightarrow\quad h(a\ ,b)=-\frac{15}{2b}\pi-\frac{15b^3\pi}{6}+15\ (a-3)^2\pi$$

Consideramos esta función y determinamos puntos estacionarios:

$$h(a\ ,\ b) = -\frac{15}{2b}\pi - \frac{15b^3\pi}{6} + 15\ (a-3)^2\,\pi$$

$$\frac{\partial h}{\partial a} = 15\pi\ 2(a-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \qquad a = 3$$

$$\frac{\partial h}{\partial b} = \frac{15\pi}{2b^2} - \frac{15b^2\pi}{2} = \frac{15\pi}{2}\left(\frac{1}{b^2} - b^2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-b^4}{b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 1 \ \ o \ \ b = -1$$

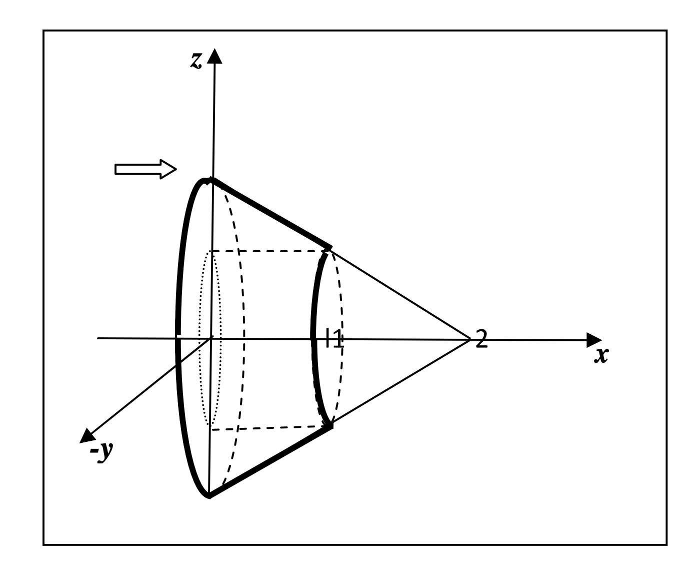
Los puntos estacionarios son: $P = (3,\,1)$; $Q = (3,\,-1)$

$$H(a,\,b) = \begin{vmatrix} 15\pi\ 2 & 0 \\ 0 & \dfrac{15\pi}{2}(-2b^{-3} - 2b) \end{vmatrix} .$$

siendo: $H(3{,}1) > 0 \quad \wedge \quad \dfrac{\partial^2 h}{\partial a^2} > 0 \quad \rightarrow$ *Mínimo Local en* $(3,\,1,\,h(3{,}1))$

$H(3,\,-1) < 0$ *No hay extremo,* $(3,-1,\,h(3,-1))$ *es punto de ensilladura*

2. Sea $W = \{(x,y,z) \in R^3 : \sqrt{y^2+z^2} \le 2 - x;\ 0 \le x \le 1\}$ un sólido con densidad volumétrica constante. Hallar su centro de masa si se sabe que el Volumen de W es $\frac{7}{3}\pi$



Por ser la figura simétrica respecto al eje x el Centro de Masa está en el eje x, por lo tanto:

$y_{cm} = 0$; $z_{cm} = 0$ Sólo hay que determinar

$$x_{cm} = \frac{\iiint_W k\,x\,dx\,dy\,dz}{\underbrace{\iiint_w k\ dx\ dy\ dz}_{k\ Vol(W)}}$$

Sabiendo que el Volumen de W es $\frac{7}{3}\pi$

$$x_{cm}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{2-r} k\,r\,x\,dx\,dr\,d\varphi}{k\frac{7}{3}\pi}+\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1 k\,x\,r\,dx\,dr\,d\varphi}{k\frac{7}{3}\pi}=\frac{\frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 r(2-r)^2\,dr\,d\varphi}{k\frac{7}{3}\pi}+\frac{\frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\varphi}{k\frac{7}{3}\pi}=$$

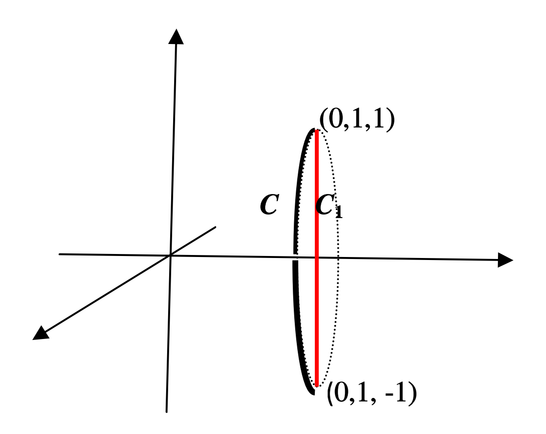
$$=\frac{\frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2(4r-4r^2+r^3)\,dr\,d\varphi}{k\frac{7}{3}\pi}+\frac{\frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\varphi}{k\frac{7}{3}\pi}=$$

$$=\frac{\frac{k}{2}\int_0^{2\pi}(2r^2-4r^3/3+r^4/4)\Big|_1^2\,d\varphi}{k\frac{7}{3}\pi}+\frac{\frac{k}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi}{k\frac{7}{3}\pi}=\frac{\frac{k}{2}(6-28/3+15/4)\,2\pi}{k\frac{7}{3}\pi}+\frac{\frac{k}{2}\pi}{k\frac{7}{3}\pi}=$$

$$=\frac{(-\frac{10}{3}+\frac{15}{4})}{\frac{7}{3}}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{3}}=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{7}{3}}+\frac{3}{14}=\frac{5}{28}+\frac{3}{14}=\frac{5}{28}+\frac{6}{28}=\underline{\underline{\frac{11}{28}}}$$

Las coordenadas del Centro de Masa son: $\underline{C_m=(11/28,\ 0,\ 0)}$

3- Sean g un campo escalar de clase C^2 y $\overline{F}(x,y,z)=\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),\frac{\partial g}{\partial y}(x,y),z^2\right)$. Calcular la Circulación de $\overline{F}$ sobre la curva $C=\{(x,y,z)\in R^3: x^2+y^2+z^2=2\ ;\ y=x^2+z^2\ ;\ x\geq 0\}$ con orientación $(0,1,-1)\rightarrow(1,1,0)\rightarrow(0,1,1)$.



Siendo la curva dada abierta, para aplicar el teorema de Stokes se cierra la curva con el segmento C_1, el $Rot(\overline{F})=\overline{0}$ y la curva C_1 está definida como la imagen de la función vectorial:

$$\overline{g}(t)=(0,1,t)\quad,\ -1\leq t\leq 1$$

$$\overline{g}'(t)=(0,0,1)$$

$$\int_C \overline{F}.\,\overline{dg}+\int_{C_1}\overline{F}\,.\,\overline{dg}\ =\overline{0}$$

$$\int_C \overline{F}.\,\overline{dg}=\int_{-1}^{1}(..,..,t^2)\,.\,(0,0,1)\,dt=\int_{-1}^{1}t^2\,dt=\underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

4- Resolver el siguiente problema de valores iniciales: $y' + \dfrac{y}{x+1} = -y^2 \quad con \quad y(-2) = 4$

$SOLUCIÓN: \quad Es\ una\ Ec.\ Dif.\ de\ Bernoulli,\ hacemos: \ z = y^{1-(2)} = y^{-1} \ \rightarrow \ z = y^{-1} \ \rightarrow$

$\rightarrow \quad \underline{y = z^{-1} \ \rightarrow \ y' = -z^{-2}\, z'}$

$Reemplazando: \ -z^{-2}\, z' + \dfrac{1}{x+1}\, z^{-1} = -z^{-2} \ \underbrace{\rightarrow}_{div.por\ (-z^{-2})} \ z' - \dfrac{1}{x+1}\, z = 1 \ (Ec.\ Dif.\ lineal)$

$z = uv \ \Rightarrow \ z' = u'v + uv' \quad reemplazando: \quad u'v + uv' - \dfrac{1}{x+1}\, uv = 1$

$(*) \quad \underline{\underline{v\left(u' - \dfrac{1}{x+1}u\right) + uv' = 1}} \quad haciendo: u' - \dfrac{1}{x+1}u = 0 \ \rightarrow \ \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x+1}u \ \rightarrow \ \dfrac{du}{u} = \dfrac{dx}{x+1}$

$\ln(u) = \ln(x+1) + C \quad (si \quad C = 0) \ \rightarrow \ \underline{u = x+1}$

$reemplazando\ en\ (*): \ (x+1)\, v' = 1 \ \Rightarrow \ dv = \dfrac{1}{x+1}\, dx \ \rightarrow \ \underline{v = \ln|x+1| + C}$

$\Rightarrow \ \underline{\underline{z = (x+1)\left[\ln|x+1| + C\right]}} \ \Rightarrow \ SOLUCIÓN \quad GENERAL: \ y = z^{-1} = \dfrac{1}{(x+1)\left[\ln|x+1| + C\right]}$

$con \ y(-2) = 4 \ encontramos\ C: \quad 4 = \dfrac{1}{(-1)\left[\underbrace{\ln(1)}_{0} + C\right]} \ \Rightarrow \ 4 = \dfrac{1}{-C} \ \rightarrow \ \underline{\underline{C = -\dfrac{1}{4}}}$

$SOLUCIÓN \quad PARTICULAR: \ y = \dfrac{1}{(x+1)\left[\ln|x+1| - 1/4\right]}$

Nota : El Ejercicio también puede resolverse haciendo : y = u v

5- Sean $\Omega \subset R^3$ un sólido cuyo borde, $\partial\Omega$, es un superficie cerrada y suave orientada con el campo de vectores normales salientes y g un campo escalar definido sobre $\mathbf{R}^3$.
Dar las hipótesis necesarias para probar que

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial \breve{n}}\, dS = \iiint_{\Omega} \nabla^2 g \; dV \qquad (\breve{n}\ saliente)$$

Usando Teorema de Gauss o de la Divergencia.

Solución: "1ero dar condiciones para aplicar T. de Gauss", si g es diferenciable, la derivada direccional: $\dfrac{\partial g}{\partial \breve{n}} = \nabla g \,.\, \breve{n}$, aplicando el teorema al campo vectorial ∇g resulta:

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial \breve{n}}\, dS = \iint_{\partial\Omega} \nabla g \,.\, \breve{n}\; ds = \iiint_{\Omega} \nabla . \nabla g \; dV = \iiint_{\Omega} \nabla^2 g \; dV$$